

Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников
по математике
в 2015 – 2016 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные опiski в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставяемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий, т.е. к д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину (адрес эл. почты **valerii.shevaldin@imm.uran.ru**) и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**). Мы ответим на все Ваши вопросы.

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников по математике
в 2015 – 2016 учебном году
6 класс**

Время выполнения заданий — 4 часа

6.1. *Замените каким-либо способом в примере на сложение десятичных дробей*

$$0, ** + 0, ** + 0, ** + 0, ** = 1$$

каждую звёздочку цифрой 2 или цифрой 3 так, чтобы получилось верное равенство.

Решение: Сумма четырёх цифр в разряде сотых должна быть кратна 10. Так как каждая из цифр либо 2, либо 3, то среди этих цифр ровно две двойки и две тройки. Тогда сумма цифр в разряде десятков должна заканчиваться цифрой 9, поэтому среди цифр десятков три двойки и одна тройка. Ясно, что любая указанная комбинация цифр подходит.

Ответ: Например, $0,32 + 0,22 + 0,23 + 0,23 = 1$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
приведён хотя бы один верный пример	7 баллов
при отсутствии верного примера имеются верные заключения об его структуре (например, определён набор последних цифр)	не больше 2 баллов
неверные примеры (в любом количестве)	0 баллов

6.2. *Ученики шестого класса отправились на праздник. У каждого мальчика было по 5 воздушных шариков, а у каждой девочки — по 4 шарика. По дороге дети стали баловаться и прокалывать шарики одноклассников. (Свои шарики дети, конечно же, не прокалывали.) В итоге каждая девочка проколола ровно один шарик, а каждый мальчик — ровно два шарика. Дима сосчитал все уцелевшие шарики, и у него получилось 100. Докажите, что Дима ошибся.*

Решение: Давайте считать, что ученик, проколовший шарик, отдаёт в виде компенсации пострадавшему один из своих. Это равносильно тому, что дети прокалывают шарики у себя и только у себя. Тогда каждая девочка расстанется с одним шариком, а каждый мальчик — с двумя. У каждого шестиклассника останется по 3 шарика, поэтому общее число шаров будет кратно трём. А 100 на 3 не делится.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верное доказательство	7 баллов
задача верно сведена к решению линейного уравнения в целых числах, но не доказана его неразрешимость	5 баллов
при отсутствии доказательства имеется идея рассмотреть делимость числа шариков на 3	3 балла
рассматривается делимость на другие числа (не на 3), в том числе идеи, связанные с чётностью	0 баллов
рассмотрены только частные случаи (в любом количестве)	0 баллов

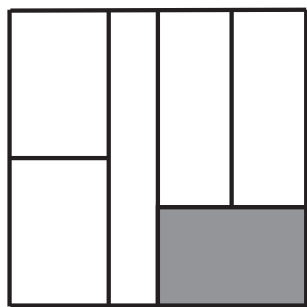
6.3. *Петя, Коля и Вася стартовали одновременно в забеге на 100 метров и Петя пришёл первым. Когда Петя пробежал половину дистанции, Коля и Вася в сумме пробежали 85 метров. Известно, что скорость каждого из трех мальчиков постоянна на протяжении всей дистанции. Сколько метров в сумме осталось пробежать до финиша Коле и Васе, когда Петя пришёл к финишу? Ответ обоснуйте.*

Решение: Так как скорости каждого из мальчиков постоянны, за то время, пока Петя пробегает вторую половину дистанции, Коля и Вася в сумме пробегут те же самые 85 метров, а всего с момента старта $2 \cdot 85 = 170$. А пробежать должны 200. Значит, им осталось пробежать $200 - 170 = 30$ метров на двоих.

Ответ: 30 метров.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
получен неверный ответ исключительно в силу арифметических ошибок	6 баллов
верно составлено, но не решено уравнение (система уравнений), решение которого (которой) приводит к ответу	4 балла
рассмотрены только частные случаи, (например, когда скорости Васи и Коли одинаковы) И/ИЛИ указано, что за оставшееся время Вася и Коля пробегут в сумме те же 85 метров	2 балла
приведён только верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)	1 балл



К условию
задачи 6.4

6.4. Квадрат (см. рисунок) разрезали на прямоугольники. Оказалось, что площади всех шести отрезанных прямоугольников равны между собой. Найдите во сколько раз длинная сторона закрашенного прямоугольника больше его короткой стороны. Ответ обоснуйте.

Решение: Так как площади всех шестиугольников равны, площадь каждого из них равна $1/6$ площади квадрата, поэтому три левых прямоугольника составляют половину квадрата. Таким образом, горизонтальная сторона закрашенного прямоугольника также равна половине стороны квадрата. Так как его площадь равна $1/6$ площади квадрата, то вторая его сторона составляет $1/3$ стороны квадрата. Значит, искомое отношение равно $1/2 : 1/3 = 1,5$.

Ответ: В 1,5 раза.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
получен неверный ответ исключительно в силу арифметических ошибок	6 баллов
приведены конкретные размеры квадрата и полученных прямоугольников без доказательства единственности картинки (с точностью до подобия)	4 балла
верно найдено отношение одной из сторон закрашенного прямоугольника к стороне квадрата	3 балла
приведён только верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)	1 балл

6.5. В трёх ящиках лежат орехи. В первом на шесть орехов меньше, чем в двух других вместе, а во втором — на 10 меньше, чем в двух других вместе. Сколько орехов лежит в третьем ящике? Ответ обоснуйте.

Решение: Пусть в первом ящике лежит x орехов, во втором и третьем — соответственно y и z . Тогда условие задачи определяется равенствами $x + 6 = y + z$ и $x + z = y + 10$. Из первого уравнения $x - y = z - 6$, из второго $x - y = 10 - z$. Значит, $z - 6 = 10 - z$, откуда $z = 8$.

Ответ: 8 орехов.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
получен неверный ответ исключительно в силу арифметических ошибок	6 баллов
верно составлена, но не решена система уравнений, описывающая условие задачи	3 балла
приведён конкретный пример (примеры) распределения орехов по ящикам (и, следовательно, верный ответ)	1 балл
приведён только верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)	0 баллов

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников по математике
в 2015 – 2016 учебном году
7 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

7.1. *Замените каким-либо способом в примере на сложение десятичных дробей*

$$0, ** + 0, ** + 0, ** + 0, ** = 1$$

каждую звёздочку цифрой 2 или цифрой 3 так, чтобы получилось верное равенство.

Решение: Сумма четырёх цифр в разряде сотых должна быть кратна 10. Так как каждая из цифр либо 2, либо 3, то среди этих цифр ровно две двойки и две тройки. Тогда сумма цифр в разряде десятков должна заканчиваться цифрой 9, поэтому среди цифр десятков три двойки и одна тройка. Ясно, что любая указанная комбинация цифр подходит.

Ответ: Например, $0,32 + 0,22 + 0,23 + 0,23 = 1$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
приведён хотя бы один верный пример	7 баллов
при отсутствии верного примера имеются верные заключения об его структуре (например, определён набор последних цифр)	не больше 2 баллов
неверные примеры (в любом количестве)	0 баллов

7.2. *В трёх ящиках лежат орехи. В первом на шесть орехов меньше, чем в двух других вместе, а во втором — на 10 меньше, чем в двух других вместе. Сколько орехов лежит в третьем ящике? Ответ обоснуйте.*

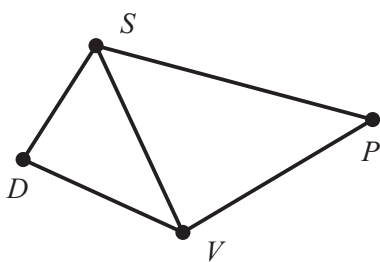
Решение: Пусть в первом ящике лежит x орехов, во втором и третьем — соответственно y и z . Тогда условие задачи определяется равенствами $x + 6 = y + z$ и $x + z = y + 10$. Из первого уравнения $x - y = z - 6$, из второго $x - y = 10 - z$. Значит, $z - 6 = 10 - z$, откуда $z = 8$.

Ответ: 8 орехов.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
получен неверный ответ исключительно в силу арифметических ошибок	6 баллов
верно составлена, но не решена система уравнений, описывающая условие задачи	3 балла
приведён конкретный пример (примеры) распределения орехов по ящикам (и, следовательно, верный ответ)	1 балл
приведён только верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)	0 баллов

7.3. Между домами четырёх гномов проложены прямые дороги, причём никакие три дома не расположены на одной прямой. Расстояние между домами Дока и Сони — 5 км, Дока и Ворчуна — 4 км, Сони и Простачка — 10 км, Ворчуна и Простачка — 17 км. Каким может быть расстояние между домами Сони и Ворчуна, если известно, что оно составляет целое число километров? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.



Решение: Обозначим дома Дока, Сони, Ворчуна и Простачка буквами D , S , V и P — см. рисунок. Так как никакие три дома не расположены на одной прямой, точки D , S , V и P являются вершинами четырёхугольника (не обязательно выпуклого). Из треугольника DCV по неравенству треугольника имеем

К решению задачи 7.3 $SV < SD + DV = 9$, а из треугольника $SV P$ по тому же неравенству получим $SV + SP > VP$, откуда $SV > 17 - 10 = 7$. Итак, $7 < SV < 9$, учитывая, что SV — число целое, находим, что $SV = 8$.

Ответ: 8 км.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
обоснованно получен верный ответ	7 баллов
обоснованно получена только одна из оценок $SV > 7$ или $SV < 9$ и есть верные ответ и пример	5 баллов
обоснованно получена только одна из оценок $SV > 7$ или $SV < 9$, а примера нет	3 балла
есть верные ответ и пример расположения домов (без обоснования единственности ответа)	2 балла
имеется идея использовать неравенство треугольника	1 балл
ответ без обоснования (с неверным обоснованием)	0 баллов
рассмотрение выпуклого и/или невыпуклого случаев	баллов не изменяет

7.4. Трое учеников решали одинаковый тест, состоящий из нескольких задач. За правильный ответ к каждой задаче ученику ставилось два балла, за неправильный снимался один балл, а если ответ на задачу не был написан, то ставилось ноль баллов. Вместе эти трое учеников набрали ровно 100 баллов. Докажите, что кто-то из них при выполнении теста записал ответы не ко всем задачам.

Решение:

Способ 1. Предположим противное. Тогда если какую-то задачу все трое решили правильно, сумма баллов за неё равна 6, если все трое неправильно — сумма -3 , если решили правильно двое — сумма 3, а если один — сумма 0. Все эти числа (6, -3 , 3, 0) кратны трём, поэтому сколько бы задач ни было, сумма всех баллов должна быть кратным 3. А 100 на 3 не делится — противоречие.

Способ 2. Пусть в тесте было n задач ($n \in \mathbf{N}$) и i -й ученик решил верно m_i из них ($i = 1, 3$). Тогда если бы он записал ответ ко всем задачам теста, то неверных ответов было бы $n - m_i$ и ученик набрал бы $2m_i - (n - m_i) = 3m_i - n$ баллов. Все трое набрали бы тогда $3 \left(\sum_{i=1}^3 m_i - n \right)$ баллов. Уравнение $3 \left(\sum_{i=1}^3 m_i - n \right) = 100$ не имеет решений в целых числах, так как его левая часть кратна трём, а правая — нет. Значит, хотя бы один ученик не дал ответа на все задачи, ч. т. д.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верное доказательство	7 баллов
задача верно сведена к решению линейного уравнения в целых числах, но не доказана его неразрешимость	5 баллов
при отсутствии доказательства имеется идея рассмотреть делимость суммы баллов на 3	3 балла
рассматривается делимость на другие числа (не на 3), в том числе идеи, связанные с чётностью	0 баллов
рассмотрены только частные примеры (в любом числе)	0 баллов

7.5. У Миши и Маши в тетрадках было написано одно и то же многозначное целое число, оканчивающееся на 9876. Маша поставила плюс между третьей и четвёртой цифрами, считая справа, а Миша — между четвёртой и пятой, также считая справа. К удивлению школьников обе полученные суммы оказались одинаковы. Какое число было записано у школьников первоначально? Приведите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет.

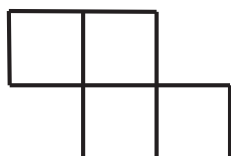
Решение: Пусть записанное число имеет вид $\overline{x9876}$, где x — тоже некоторое натуральное число. Тогда у Миши получилась сумма $x + 9876$, а у Маши — сумма $10x + 9 + 876$. Из равенства $x + 9876 = 10x + 9 + 876$ находим, что $x = 999$.

Ответ: 9999876 и другого числа нет.

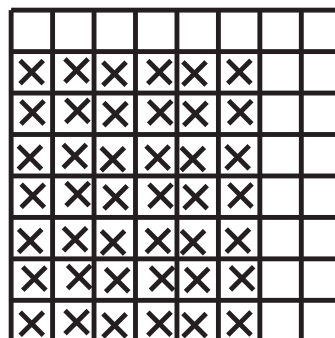
Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
приведён верный ответ и доказана его единственность	7 баллов
ответ неверен только ввиду арифметической ошибки	6 баллов
Условие верно записано диофантовым уравнением, но последнее не решено	5 баллов
верно проанализированы случаи n -значных чисел для конкретных натуральных значений n	3 балла
верный ответ, и проверка того, что число 9999876 подходит под условие задачи И/ИЛИ присутствует неудачная попытка записать в общем случае условие задачи уравнением в целых числах	2 балла
верный ответ без обоснования	1 балл

7.6. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске (размер 8×8 клеток) четырёхклеточный многоугольник в виде буквы Z (см. рисунок) так, чтобы он располагался точно по клеткам доски и в пределах доски? Четырёхугольник можно поворачивать и переворачивать. Ответ обоснуйте.



К условию задачи 7.6



К решению задачи 7.6

Решение: Дополним четырёхугольник двумя клетками до прямоугольника 2×3 и сначала найдём количество способов расположить на шахматной доске такой прямоугольник. Пусть его большая сторона горизонтальна. Тогда левая нижняя клетка прямоугольника может быть любой из клеток, отмеченных на рисунке крестиком — имеем $6 \cdot 7 = 42$ положения. Столько же возможностей расположить прямоугольник так, чтобы его большая сторона была вертикальна. Итого, прямоугольник 2×3 может быть расположен на доске $2 \cdot 42 = 84$ способами. Остаётся заметить, что для каждому расположению прямоугольника на доске соответствует ровно два положения искомого четырёхугольника (из прямоугольника надо убрать пару противоположных угловых клеток, а это делается двумя способами). Значит, четырёхугольник можно разместить $84 \cdot 2 = 168$ способами.

Ответ: 168 способами.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
обоснованно получен верный ответ	7 баллов
не учтено, одно из двух: 1) четырёхугольник можно поворачивать 2) его можно переворачивать; соответственно получен неверный ответ 84. Других ошибок нет.	5 баллов
не учтены оба условия: 1) четырёхугольник можно поворачивать 2) его можно переворачивать; соответственно получен неверный ответ 42. Других ошибок нет.	4 балла
Имеется идея достроить четырёхугольник до прямоугольника, но количество расположений прямоугольника считается неверно	3 балла
верный ответ без обоснования	1 балл
непринципиальные ошибки в подсчёте расположений (например, неверно подсчитано число крестиков в приведённом выше решении)	–1 балл за каждую ошибку
идеи, не ведущие к решению (например, раскраска доски)	не оцениваются

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников по математике
в 2015 – 2016 учебном году
8 класс**

Время выполнения заданий — 4 часа

8.1. Пусть все числа x , y , z не равны нулю. Найти все значения, которые может принимать выражение

$$\left(\frac{x}{|y|} - \frac{|x|}{y}\right) \cdot \left(\frac{y}{|z|} - \frac{|y|}{z}\right) \cdot \left(\frac{z}{|x|} - \frac{|z|}{x}\right).$$

Решение: По принципу Дирихле среди чисел x , y и z найдутся два числа одного знака. Тогда соответствующая им скобка равна 0, и всё произведение тоже равно 0.

Ответ: Только число 0.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верный и обоснованный ответ	7 баллов
верно разобраны некоторые (не все) случаи раскрытия модулей	3 балла
приведён пример, показывающий, что 0 может получиться	1 балл
верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)	0 баллов

8.2. Петя и три его одноклассника стартовали одновременно в забеге на 100 метров, и Петя пришёл первым. Через 12 секунд после начала забега никто еще не финишировал, и все четыре его участника в сумме пробежали 288 метров. А когда Петя закончил бег, остальным трём его участникам осталось пробежать до финиша в сумме 40 метров. Сколько метров пробежал Петя за первые 12 секунд? Ответ обоснуйте. Предполагается, что каждый из участников забега бежал со своей постоянной скоростью.

Решение: Бегуны должны были в сумме пробежать 400 метров, при этом за 12 секунд они пробежали 288 метров, т. е. за 1 секунду бегуны пробегают $288 : 12 = 24$ метра. Когда Петя финишировал, бегуны пробежали $400 - 40 = 360$ метров, поэтому с момента старта прошло $360 : 24 = 15$ секунд. Значит, Петя бежит со скоростью 100/15 метра в секунду, и за 12 секунд пробежит $\frac{100}{15} \cdot 12 = 80$ метров.

Ответ: 80 метров.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
получен неверный ответ исключительно в силу арифметических ошибок	6 баллов
верно составлено, но не решено уравнение (система уравнений), решение которого (которой) приводит к ответу	4 балла
рассмотрены только частные случаи, (например, когда скорости трёх других бегунов одинаковы) И/ИЛИ найдена только сумма скоростей всех 4-х бегунов (24 м/с)	2 балла
приведён только верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)	1 балл

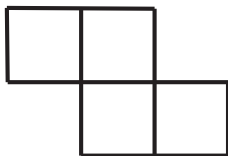
8.3. *Неизвестные x , y и z связаны соотношением $\frac{1}{xy} = \frac{y}{z-x+1} = \frac{2}{z+1}$. Докажите, что в этом случае одно неизвестное является средним арифметическим двух других.*

Решение: Из равенства $\frac{1}{xy} = \frac{2}{z+1}$ следует, что $z+1 = 2xy$. Но тогда из равенства $\frac{1}{xy} = \frac{y}{z-x+1}$ получаем, что $2xy - x = xy^2$. Неизвестное x не равно 0 (иначе первая дробь не существует), значит, полученное равенство на x можно сократить. Получится (после очевидных преобразований) уравнение $(y-1)^2 = 0$, откуда $y = 1$. Тогда равенство $z+1 = 2xy$ приводится к виду $z+1 = 2x$ или $x = \frac{z+1}{2} = \frac{z+y}{2}$. Это значит, что неизвестное x есть среднее арифметическое неизвестных z и y .

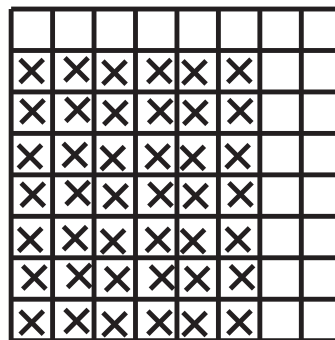
Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Доказано, что $y = 1$ (без дальнейшего продвижения)	5 баллов
Задача верно сведена к анализу одного уравнения от двух переменных, но этого анализа нет (неверен)	3 балла
Доказательства нет, а условие проиллюстрировано на нескольких конкретных примерах переменных	1 балл
Любые выкладки, не ведущие к решению, а также поиск ОДЗ выражения из условия	не оцениваются

8.4. *Сколькими способами можно расположить на шахматной доске (размер 8×8 клеток) четырёхклеточный многоугольник в виде буквы Z (см. рисунок) так, чтобы он располагался точно по клеткам доски и в пределах доски? Четырёхугольник можно поворачивать и переворачивать. Ответ обоснуйте.*



К условию задачи 8.4



К решению задачи 8.4

Решение: Дополним четырёхугольник двумя клетками до прямоугольника 2×3 и сначала найдём количество способов расположить на шахматной доске такой прямоугольник. Пусть его большая сторона горизонтальна. Тогда левая нижняя клетка прямоугольника может быть любой из клеток, отмеченных на рисунке крестиком — имеем $6 \cdot 7 = 42$ положения. Столько же возможностей расположить прямоугольник так, чтобы его большая сторона была вертикальна. Итого, прямоугольник 2×3 может быть расположен на доске $2 \cdot 42 = 84$ способами. Остаётся заметить, что для каждому расположению прямоугольника на доске соответствует ровно два положения искомого четырёхугольника (из прямоугольника надо убрать пару противоположных угловых клеток, а это делается двумя способами). Значит, четырёхугольник можно разместить $84 \cdot 2 = 168$ способами.

Ответ: 168 способами.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
обоснованно получен верный ответ	7 баллов
не учтено, одно из двух: 1) четырёхугольник можно поворачивать 2) его можно переворачивать; соответственно получен неверный ответ 84. Других ошибок нет.	5 баллов
не учтены оба условия: 1) четырёхугольник можно поворачивать 2) его можно переворачивать; соответственно получен неверный ответ 42. Других ошибок нет.	4 балла
Имеется идея достроить четырёхугольник до прямоугольника, но количество расположений прямоугольника считается неверно	3 балла
верный ответ без обоснования	1 балл
непринципиальные ошибки в подсчёте расположений (например, неверно подсчитано число крестиков в приведённом выше решении)	–1 балл за каждую ошибку
идеи, не ведущие к решению (например, раскраска доски)	не оцениваются

8.5. Пусть точка D — середина медианы AF треугольника ABC , E — точка пересечения прямой CD со стороной AB . Докажите, что если $BD = BF = CF$, то $AE = DE$.

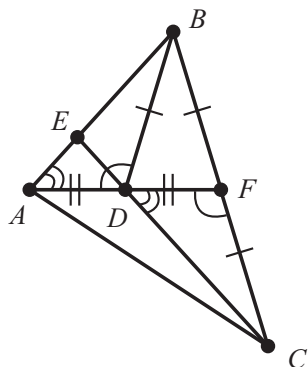
Решение:

Способ 1. 1) $\angle BDF = \angle BFD$, как углы при основании равнобедренного треугольника BFD . Поэтому $\angle ADB = 180^\circ - \angle BDF = 180^\circ - \angle DFB = \angle DFC$.

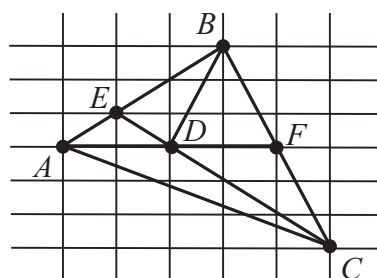
2) Треугольники ADB и DFC равны по двум сторонам и углу между ними ($AD = DF$ и $DB = FC$ по условию, а $\angle ADB = \angle DFC$ по первому пункту), поэтому $\angle CDF = \angle DAB$ — см. рисунок.

3) $\angle CDF = \angle ADE$, как вертикальные; $\angle CDF = \angle DAB$ по второму пункту, следовательно, $\angle ADE = \angle DAB = \angle DAE$.

4) Углы при основании AD треугольника ADE равны по третьему пункту, следовательно, треугольник равнобедренный и $AE = DE$, что и требовалось доказать.



К решению задачи 8.5, способ 1



К решению задачи 8.5, способ 2

Способ 2. Расположим треугольник так, чтобы его медиана AF была горизонтальной, и проведём вертикальные прямые так, что расстояние между соседними равно четверти медианы, и одна такая линия проходила бы через вершину A . Тогда вершина B , будучи равноудалённой от точек D и F , будет расположена на проведённой прямой. Проведём горизонтальные линии с шагом равным трети расстояния от точки B до прямой AF . Получим некоторую прямоугольную сетку на плоскости (см. рисунок). Теперь видно, что точка C попадает в узел сетки, а прямые AB и CD идут по диагоналям прямоугольников — ячеек сетки — и пересекаются как раз в её узле. Тогда $EA = ED$, как диагонали равных прямоугольников.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Найдено отношение, в котором точка E делит сторону AB , но доказательство не завершено	5 баллов
Доказано равенство треугольников ADB и DFC ; дальнейшего продвижения нет	4 балла
Указано (или отмечено на чертеже), что $\angle ADB = \angle DFC$; дальнейшего продвижения нет	2 балла
Любые замечания о свойствах конструкции, если они не способствуют решению	не оцениваются

8.6. Все натуральные числа от 1 до 20 разбили на пары и числа в каждой паре сложили. Какое наибольшее количество из получившихся десяти сумм может делиться на 11? Ответ обоснуйте.

Решение: Число 11 — единственное число набора, которое делится на 11, поэтому при прибавлении к нему с любого другого числа делимость на 11 будет нарушена. Таким образом, все 10 сумм на 11 делиться не могут. Один из примеров, когда девять сумм делятся на 11, таков:

(1, 10), (2, 20), (3, 19), (4, 18), (5, 17), (6, 16), (7, 15), (8, 14), (9, 13), (11, 12).

Ответ: 9 сумм.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Наличие верного примера и доказательства его оптимальности	7 баллов
Имеется доказательство, что 10 сумм получить нельзя (при отсутствии примера на 9 сумм)	3 балла
Приведён пример, показывающий, что можно получить 9 сумм (при отсутствии доказательства его оптимальности)	1 балл
Верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)	0 баллов
Примеры меньшего числа сумм (в любом количестве)	не оцениваются

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников по математике
в 2015 – 2016 учебном году
9 класс**

Время выполнения заданий — 4 часа

9.1. На доске написаны четыре ненулевых числа, причём сумма любых трёх из них меньше четвёртого числа. Какое наименьшее количество отрицательных чисел может быть написано на доске? Ответ обосновать.

Решение: Пусть на доске записаны числа $a \geq b \geq c \geq d$. Условие задачи равносильно неравенству $a + b + c < d$. Отсюда $a + b < d - c \leq 0$, поэтому среди чисел a и b есть отрицательные. Тогда числа c и d тоже отрицательны, значит, отрицательных не меньше трёх. Набор чисел $a = 1, b = -2, c = d = -3$ показывает, что возможна ситуация, когда отрицательных чисел ровно 3.

Ответ: 3 числа.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Наличие верного примера и доказательства его оптимальности	7 баллов
Имеется доказательство, что отрицательных чисел не меньше трёх (при отсутствии примера с тремя числами)	3 балла
Приведён пример набора с тремя отрицательными числами (при отсутствии доказательства его оптимальности)	1 балл
Верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)	0 баллов
Примеры наборов с четырьмя отрицательными числами	не оцениваются

9.2. Приведённый квадратный трёхчлен $y = x^2 + ax + b$ имеет два корня. Докажите, что если прибавить к коэффициенту a любой из этих корней, а из коэффициента b вычесть квадрат этого же корня, то полученный трёхчлен также будет иметь по крайней мере один корень.

Решение:

Способ 1. Пусть корни исходного квадратного трёхчлена p и s . По теореме Виета $a = -p - s, b = ps$. Пусть мы добавили к коэффициенту a число p , а из коэффициента b число p^2 вычли. Тогда получился трёхчлен

$$x^2 + (a + p)x + b - p^2 = x^2 - sx + ps - p^2.$$

Его дискриминант равен $D = s^2 - 4(ps - p^2) = (s - 2p)^2 \geq 0$. Значит, полученный многочлен имеет хотя бы один действительный корень.

Способ 2. Пусть t — корень исходного трёхчлена. Тогда $t^2 + at + b = 0$. Преобразуем левую часть: $t^2 + at + b = t^2 + at + t^2 - t^2 + b = t^2 + (a + t)t + (b - t^2)$. Полученное

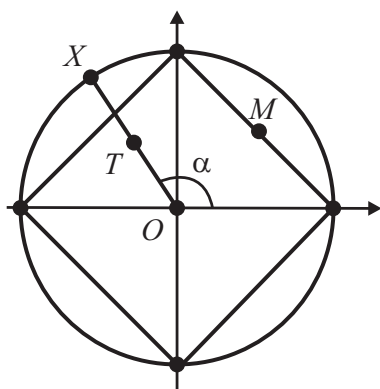
равенство $t^2 + (a+t)t + (b-t^2) = 0$ показывает, что трёхчлен $x^2 + (a+t)x + b - t^2$ имеет своим корнем число t , что доказывает утверждение задачи.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Верно выписана теорема Виета для исходного трёхчлена (без дальнейшего продвижения)	2 балла
Верно найдены корни исходного трёхчлена и верно записан получающийся трёхчлен (с коэффициентами, выраженными через a и b)	1 балл
Исследованы только несколько конкретных трёхчленов	0 баллов
Выкладки любой длины, не ведущие к доказательству	не оцениваются

9.3. В окружность с центром O вписан квадрат. Пусть M — середина его стороны, X — произвольная точка на окружности, T — середина отрезка OX .

Докажите, что $\frac{MX}{MT} = \sqrt{2}$.



К решению задачи 9.3

Решение:

Способ 1. Введём систему координат с осями, идущими вдоль диагоналей квадрата. Направления осей выберем так, чтобы точка M попала в первую координатную четверть (см. рисунок). Теперь $O(0; 0)$, если радиус окружности R , то точка M имеет координаты $M\left(\frac{R}{2}; \frac{R}{2}\right)$, а точка X имеет координаты $X(R \cos \alpha; R \sin \alpha)$ для некоторого угла α . Наконец, точка T получит координаты, равные полусумме координат точек O и X , т. е. $T\left(\frac{R \cos \alpha}{2}; \frac{R \sin \alpha}{2}\right)$. Далее простой подсчёт:

$$MX^2 = \left(\frac{R}{2} - R \cos \alpha\right)^2 + \left(\frac{R}{2} - R \sin \alpha\right)^2 = R^2 \left(\frac{3}{2} - \cos \alpha - \sin \alpha\right);$$

$$MT^2 = \left(\frac{R}{2} - \frac{R \cos \alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2} - \frac{R \sin \alpha}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{4}(3 - 2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha);$$

$$MX^2 = 2MT^2; \quad \frac{MX}{MT} = \sqrt{2},$$

что и требовалось доказать.

Способ 2. Очевиден случай, когда точка X лежит на диаметре, проходящем через точку M . Пусть X не лежит на этом диаметре, то есть существует невырожденный треугольник OMX . Построим его до параллелограмма $OMXY$. По свойству

параллелограмма сумма квадратов его сторон равна сумме квадратов его диагоналей, то есть $2OM^2 + 2MX^2 = OX^2 + MY^2$. Заметим, что $MY = 2MT$ и что $OM = \frac{r}{\sqrt{2}}$, где r — радиус окружности. Тогда $2OM^2 = r^2 = OX^2$ и равенство превращается в условие $2MX^2 = 4MT^2$, равносильное доказываемому.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Ход доказательства верен, но доказательство не завершено из-за ошибок в формулах (тригонометрии, теоремы синусов и т. п.)	3 балла
Исследованы только частные случаи расположения точки X на окружности	1 балл

9.4. Прогульщик Вася каждый понедельник сентября пропускал по одному уроку, каждый вторник — по два урока, среду — по три, четверг — по четыре и пятницу — по пять уроков. Исключение составило 1 сентября: в этот день Вася в честь начала учебного года уроков не прогуливал. Оказалось, что за весь сентябрь Вася пропустил ровно 64 урока. На какой день недели пришлось 1 сентября? Ответ обосновать. (Все субботы и воскресенья сентября были выходными, а остальные дни учебными.)

Решение: Заметим, что за любые последовательные семь дней каждый день недели встречается ровно 1 раз, поэтому за любые последовательные 7 дней (начиная с 2 сентября) Вася прогуливал $1+2+3+4+5 = 15$ уроков. Значит за период с 2 по 29 сентября он прогулял ровно $15 \cdot 4 = 60$ уроков, поэтому 30 сентября прогулял $64 - 60 = 4$ урока. Это означает, что 30 сентября пришлось на четверг. Тогда на четверг пришлись также и такие числа сентября (вычитаем последовательно 7): 23, 16, 9, 2. А это значит, что 1 сентября пришлось на среду.

Ответ: На среду.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Верное рассуждение с неверным ответом из-за неверно взятого числа дней в сентябре (31 вместо 30)	6 баллов
Замечено, что за ЛЮБЫЕ последовательные 7 дней Вася прогуливает 15 уроков	4 балла
Показано, что 1 сентября может прийтись на среду, но не показано, что оно не может быть другим днём	2 балла
Замечено, что 1 и 29 сентября приходятся на один день недели; дальнейших продвижений нет	1 балл
Верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)	0 баллов

9.5. В обменном пункте можно совершать только следующие операции:

- 1) обменять 2 золотых монеты на три серебряных и одну медную;
- 2) обменять 5 серебряных монет на три золотых и одну медную.

У Николая были только серебряные монеты. После нескольких посещений обменного пункта серебряных монет у него стало меньше, золотых не появилось, зато появилось 50 медных монет. На сколько уменьшилось количество серебряных монет у Николая? Ответ обоснуйте. Учтите, что обмен денег в банке не является равноценной операцией, то есть при каждом обмене покупательная способность имеющихся у Николая монет несколько уменьшалась.

Решение: В результате каждой операции Николай приобретает ровно 1 медную монету, значит, операций всего было ровно 50. Из них несколько (пусть a) было 1-го типа, остальные $50 - a$ — второго. На операции первого типа Николай потратил $2a$ золотых монет, на операциях второго типа заработал $3(50 - a)$ золотых монет. Так как золотых монет у него не осталось, то $2a = 3(50 - a)$, откуда $a = 30$. Это значит, что на операциях первого типа Николай получил $30 \cdot 3 = 90$ серебряных монет, а на операциях второго типа потерял $(50 - 30) \cdot 5 = 100$ таких монет. Тогда их количество уменьшилось на $100 - 90 = 10$ штук.

Ответ: На 10 монет.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Верный ход решения, но ответ неверен из-за арифметических ошибок	6 баллов
Верно и обоснованно найдено количество операций одного типа (или первого, или второго)	5 баллов
Доказано, что отношение количеств операций 1-го и 2-го типов 3:2 И/ИЛИ обоснованно найдено общее количество операций обоих типов	3 балла
Задача верно решена в предположении равноценности всех обменов (общий случай не исследован)	2 балла
Приведён конкретный пример обменов, показывающий, что ответ 10 возможен, но его единственность не обоснована	1 балл
Верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)	0 баллов

9.6. Конечно или бесконечно множество троек (a, b, c) целых чисел, для которых верно равенство $a^2 + b^2 = 2(c^2 + 1)$? Ответ обосновать.

Решение:

Способ 1. $2(c^2 + 1) = (c - 1)^2 + (c + 1)^2$, поэтому можно положить a любым целым числом, в качестве b взять $a + 2$, а в качестве c — число $a + 1$. Таким образом, множество таких троек бесконечно.

Способ 2. Докажем, что множество натуральных чисел, представимых в виде суммы квадратов двух целых чисел, замкнуто относительно операции умножения. В самом деле, пусть $a = m^2 + n^2$ и $b = p^2 + t^2$ для некоторых целых чисел m, n, p и t . Тогда

$$\begin{aligned} ab &= (m^2 + n^2)(p^2 + t^2) = (mp)^2 + (mt)^2 + (np)^2 + (nt)^2 = \\ &= (mp)^2 + 2mntp + (nt)^2 + (mt)^2 - 2mntp + (np)^2 = (mp + nt)^2 + (mt - np)^2. \end{aligned}$$

Числа $mp + nt$ и $mt - np$ — целые, поэтому утверждение доказано.

Так как $2 = 1^1 + 1^2$ и $c^2 + 1 = c^2 + 1^2$, число $2(c^2 + 1)$ представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел для любого целого числа c . Значит, множество троек целых чисел, для которых верно равенство $a^2 + b^2 = 2(c^2 + 1)$, бесконечно.

Ответ: Бесконечно.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство бесконечности количества троек	7 баллов
Замечена, но не обоснована (обоснована неверно) конструкция, позволяющая получить бесконечную серию троек чисел	4 балла
Сформулированы, но не доказаны верные утверждения, из которых легко следует утверждение задачи	2 балла
Приведены отдельные примеры подходящих троек в конечном количестве И/ИЛИ верный ответ без обоснования И/ИЛИ неверный ответ	0 баллов

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников по математике
в 2015 – 2016 учебном году
10 класс**

Время выполнения заданий — 4 часа

10.1. Положительные числа a, b, c таковы, что точка $A(1; 2)$ расположена ниже графика параболы $y = ax^2 + bx + c$. Можно ли однозначно установить, как эта точка расположена (выше, ниже или на) по отношению к графику параболы $y = cx^2 + bx + a$? Ответ обосновать.

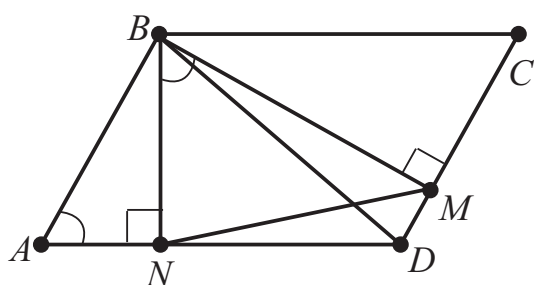
Решение: Заметим, что графики обеих парабол пересекаются в точке с абсциссой 1, поэтому любая точка с абсциссой 1 расположена одинаково по отношению к обеим параболам, значит, ответ на вопрос задачи положителен.

Ответ: Можно. Точка A расположена ниже.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Приведён пример, показывающий, что точка A может лежать ниже, а что не может быть иначе — не доказано	1 балл
Верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)	0 баллов

10.2. В параллелограмме $ABCD$ известны угол $\angle A = \alpha$ и диагональ $BD = d$. Пусть M и N — основания высот, опущенных из вершины B на прямые CD и AD соответственно. Найдите MN .



К решению задачи 10.2

Решение: 1) Заметим, что верно равенство $\angle MBN = \angle BAD = \alpha$, так как стороны угла MBN перпендикулярны сторонам угла BAD .

2) Рассмотрим окружность с диаметром $BD = d$. Точки M и N лежат на этой окружности, так как $\angle BMD = \angle BND = 90^\circ$.

3) По теореме синусов для треугольника BMN имеем $\frac{MN}{\sin \angle MBN} = d$, откуда полу-

чаем, что $MN = d \sin \alpha$.

Ответ: $MN = d \sin \alpha$.

Примечание: Утверждение задачи и приведённое решение не зависят от того, лежат ли основания перпендикуляров на сторонах параллелограмма или их продолжениях.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения получен неверный ответ из-за ошибок в формулах или в арифметике	6 баллов
Доказаны оба факта: а) Четырёхугольник с вершинами B D M N описан; б) $\angle MBN = \alpha$, но решение не доведено до ответа	5 баллов
Доказан один из фактов а) и б) предыдущего пункта	3 балла
Верный ответ без обоснования И/ИЛИ разобраны случаи конкретных параллелограммов (например, прямоугольника)	1 балл
Рассмотрены несколько случаев расположения точек N и N на прямых, содержащих стороны CD и AD	оценивается ровно один случай
Любые утверждения и/или выкладки, не ведущие к решению	не оцениваются

10.3. На доске написано несколько различных действительных чисел. Известно, что сумма любых трех из них рациональна, а сумма любых двух из них — иррациональна. Какое наибольшее количество чисел может быть написано на доске? Ответ обосновать.

Решение: Набор из трёх чисел $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{2} - \sqrt{3}$, как легко проверить, удовлетворяет условию задачи. Покажем, что на доске не может быть записано более трёх чисел.

Предположим противное, и пусть a_i ($i = \overline{1, 4}$) — некоторые четыре числа этого набора. Тогда числа $a_1 + a_2 + a_3$ и $a_1 + a_2 + a_4$ — рациональны, поэтому рационально и число $(a_1 + a_2 + a_3) - (a_1 + a_2 + a_4) = a_3 - a_4$. Аналогично доказывается рациональность числа $a_3 - a_2$. Тогда рационально число $(a_3 - a_4) + (a_3 - a_2) - (a_2 + a_3 + a_4) = a_3$. Точно также показывается рациональность всех чисел a_i . Но тогда сумма любых двух из них рациональна, что противоречит условию задачи.

Ответ: Три числа.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Имеется верный пример трёх чисел, а в доказательстве (в принципе верном) его оптимальности имеются неточности	5 баллов
Верное доказательство, что 4-х чисел быть не может (при отсутствии примера на 3 числа)	3 балла
В верном (в целом) доказательстве, что 4-х чисел быть не может, имеются неточности и примера на 3 числа тоже нет	2 балла
Приведён пример трёх чисел, но доказательство его оптимальности отсутствует	1 балл
Верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)	0 баллов
Доказательство, что чисел меньше 5 (или ещё большего числа)	не оценивается

10.4. Точку плоскости с координатами $(x; y)$ разрешено соединить отрезком с точкой, имеющими координаты $(x + 3y; y)$ или с точкой, имеющей координаты $(x; y - 2x)$. Можно ли при таких условиях соединить ломаной точки $A(19; 47)$ и $B(12; 17)$? Ответ обосновать.

Решение: Очевидно, что если координаты начальной точки — числа целые, то и координаты всех последующих точек также будут целыми. Разность абсцисс точек, которые разрешено соединять отрезком, равна либо $3y$, либо 0 и в обоих случаях делится на 3 . Поэтому остаток от деления на 3 абсцисс всех получаемых точек одинаков — это есть инвариант задачи. (Другим инвариантом является нечётность ординаты, но рассмотрение этого инварианта к верному ответу привести не может.) Так как 19 при делении на 3 даёт в остатке 1 , а $12 — 0$, точки A и B ломаной соединить не получится.

Ответ: Нельзя.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Идея рассмотрения делимости координат точек на фиксированные числа (при отсутствии решения)	2 балла
Верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)	0 баллов
Отсутствие обоснование целости координат всех рассматриваемых точек	балл не понижается

10.5. Пусть a, b, c и d — натуральные числа и $\frac{ad-1}{a+1} + \frac{bd-1}{b+1} + \frac{cd-1}{c+1} = d$. Найдите все значения, которые может принимать число d .

Решение: Преобразуем уравнение равносильным образом:

$$\begin{aligned}\frac{ad-1}{a+1} + \frac{bd-1}{b+1} + \frac{cd-1}{c+1} &= d \\ d - \frac{d+1}{a+1} + d - \frac{d+1}{b+1} + d - \frac{d+1}{c+1} &= d \\ 2d &= (d+1) \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \right) \\ \frac{2d}{d+1} &= \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \\ 2 - \frac{2}{d+1} &= \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \\ \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} + \frac{2}{d+1} &= 2.\end{aligned}$$

Так как все переменные — суть натуральные числа, каждая из трёх первых дробей левой части не превосходит $1/2$. Поэтому для выполнения равенства необходимо условие $\frac{2}{d+1} \geq 2 - 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, откуда $d \leq 3$, то есть $d \in \{1, 2, 3\}$. Покажем, что все такие значения d может принимать.

$d = 3$ достигается при $a = b = c = 1$. (Других вариантов нет, что доказать несложно, но не требуется.)

$d = 2$ достигается, например, при $a = b = 1$ и $c = 2$. (Есть ещё две тройки, получающиеся из приведённой перестановкой значений неизвестных.)

$d = 1$ возникает в нескольких случаях. Например, при $c = 6$, $b = 2$, $a = 1$ или при $b = c = 3$, $a = 1$. А всего таких случаев 10.

Ответ: $d \in \{1, 2, 3\}$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Доказано, что $d \leq 3$, но не обосновано, что все значения из множества $\{1, 2, 3\}$ возможны	3–5 баллов в зависимости от количества обоснованных значений
Обоснованно найдены все допустимые значения для d , но не доказано, что нет других	3 балла
Обоснованно найдены некоторые (не все) допустимые значения для d	2 балла
Верный ответ без обоснования	1 балл
Доказательства того, что $d \leq 3$ нет, но есть существенные продвижения в этом направлении	+1 балл

10.6. На заводе работают ровно 217 женщин, среди которых 17 брюнеток, а остальные 200 — блондинки. Перед Новым Годом все они покрасили свои волосы, и каждая из этих женщин написала в «Контакте» фамилии ровно 200 женщин завода, по её мнению, точно являющихся блондинками. При этом каждая из брюнеток указала верно всех блондинок, а каждая блондинка могла указать на кого угодно, кроме себя. Докажите, что на основании этих данных можно выявить по крайней мере 13 блондинок.

Решение: По условию задачи верный список всех 200 блондинок будет в «Контакте» ровно у 17 сотрудниц завода: брюнетки напишут именно его, а блондинка его не напишет никогда, так как в противном случае она должна была бы указать в нём и себя. Значит, если некоторый список встречается не 17 раз, а любое другое количество, то он неверный, и его составила блондинка. Уберём все списки, которые встречаются ровно 17 раз. Останется $217 - 17n$ списков. $217 - 17n \geq 0$, поэтому $n \leq 12$ (мы помним, что n — число натуральное). Тогда осталось не менее $217 - 12 \cdot 17 = 13$ списков, и мы вычислили не менее 13 их авторов-блондинок.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Обосновано, что верный список блондинок встречается ровно в 17 списках (без дальнейшего продвижения)	4 балла
Обосновано, что верный список блондинок встречается хотя бы 17 раз (без дальнейшего продвижения)	2 балла
Имеется только идея определять блондинок, как авторов неверных списков	1 балл
Любые идеи, не ведущие к доказательству	не оцениваются

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников по математике
в 2015 – 2016 учебном году
11 класс**

Время выполнения заданий — 4 часа

11.1. Приведённый квадратный трёхчлен $y = x^2 + ax + b$ имеет корнями действительные числа t и s причём $-1 < t < 0$. Докажите, что если прибавить к коэффициентам a и b корень t , то полученный трёхчлен также будет иметь два различных действительных корня.

Решение: По теореме Виета $b = t \cdot s$, $a = -t - s$. Тогда полученный трёхчлен имеет вид $g(x) = x^2 + (a+t)x + (b+t) = x^2 - sx + st + t$. Его дискриминант равен $D = s^2 - 4st - 4t = (s - 2t)^2 - 4t(1+t) \geq -4t(1+t)$. Так как $-1 < t < 0$, то $-4t(1+t) > 0$, значит дискриминант нового квадратного трёхчлена положителен, что доказывает утверждение задачи.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Верно выписан дискриминант нового трёхчлена (через две переменные), но не доказана его положительность	4 балла
Указана связь между числами a , b , t и s (теорема Виета или формулы корней)	1 балл
Утверждение проиллюстрировано на примерах	0 баллов
Любые выкладки, не ведущие к доказательству	не оцениваются

11.2. Пусть α , β и γ — плоские углы трёхгранного угла. Докажите, что числа $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\sin \frac{\beta}{2}$ и $\sin \frac{\gamma}{2}$ являются длинами сторон некоторого треугольника.

Решение: Пусть вершина угла — точка O . Отложим на всех рёбрах данного трёхгранного угла равные отрезки $OA = OB = OC = 1/2$ и рассмотрим тетраэдр $OABC$. Из треугольников, образующих его боковые грани, легко (например, по теореме косинусов) находятся отрезки AB , AC и BC . Эти отрезки оказываются равными $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\sin \frac{\beta}{2}$ и $\sin \frac{\gamma}{2}$. Из них составлен треугольник ABC . Утверждение доказано.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
В принципиально верном доказательстве имеются арифметические или тригонометрические погрешности	6 баллов
Имеется идея (не реализованная) получить треугольник с длинами сторон, пропорциональными синусам половинных углов	2 балла
Утверждение проиллюстрировано на примерах	0 баллов
Любые рассуждения, не ведущие к решению	не оцениваются

11.3. Все 100 натуральных чисел от 2 до 101 разбили на две группы по 50 чисел в каждой. Числа в каждой группе перемножили, и два полученных произведения сложили. Докажите, что эта сумма — составное число.

Решение: Заметим, что в результате описанного действия всегда получится натуральное число, большее 101. Возможны два случая.

1) В каждой группе есть чётное число. Тогда произведение чисел в каждой из групп чётно, как и сумма этих произведений. Чётное число, большее 2 — составное, утверждение в этом случае доказано.

2) Все чётные числа попали в одну группу. Тогда (так как в наборе чётных чисел ровно 50) одна из групп содержит все чётные числа, вторая — все нечётные. В каждой группе, следовательно есть числа, кратные 3 (можно аналогично рассуждать с делимостью на 5, 7, и т. д.); тогда каждое из произведений, также как и их сумма тоже делится на 3. Натуральное число, большее 3 и делящееся на 3 — составное. Утверждение доказано и в этом случае тоже.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
В приведённом доказательстве не рассмотрен принципиально важный случай	3 балла
Утверждение проиллюстрировано на примерах	0 баллов

11.4. Решите уравнение $2^{\sqrt{xy}} + 5^{\sqrt{x+y}} = 3^{-x} + 4^{-y}$.

Решение: Область допустимых значений уравнения определяется двумя условиями: $xy \geq 0$ и $x + y \geq 0$. Из первого условия следует, что либо среди чисел x и y есть число 0, либо эти два числа одного знака. Из второго условия видно, что случай, когда они оба отрицательны, невозможен; также невозможен случай, когда одно из чисел отрицательно, а второе равно нулю. Значит $x \geq 0$ и $y \geq 0$. Тогда $3^{-x} \leq 3^0 = 1$, $4^{-y} \leq 4^0 = 1$, и $3^{-x} + 4^{-y} \leq 2$, причём равенство достигается только при $x = y = 0$. С другой стороны, $xy \geq 0$, поэтому $2^{\sqrt{xy}} \geq 2^0 = 1$. Также $5^{\sqrt{x+y}} \geq 5^0 = 1$, значит, $2^{\sqrt{xy}} + 5^{\sqrt{x+y}} \geq 2$. Таким образом, левая часть данного

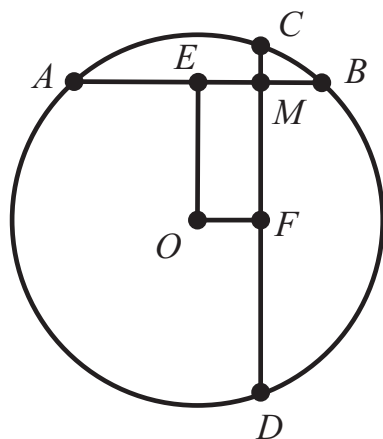
уравнения не меньше двух, а правая — не больше двух. Тогда они обе равны 2, что достигается при $x = y = 0$, и только при таком условии.

Ответ: (0; 0).

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Ход решения верен, но какие-то из неравенств, либо а), либо б) либо ОДЗ, ошибочно записаны, как строгие; с учётом этого сделан вывод об отсутствии решений неравенства	6 баллов
Доказаны два неравенства а) $2\sqrt{xy} + 5\sqrt{x+y} \geq 2$ и б) $3^{-x} + 4^{-y} \leq 2$, но при этом либо сделан неверный вывод, что неравенство решений не имеет, либо не обосновано, что равенство достигается в единственном случае $x = y = 0$	5 баллов
Доказано одно из двух неравенств а) или б) предыдущего пункта	3 балла
Верно найдена только ОДЗ уравнения	1 балл
Верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)	0 баллов
Любые выкладки, не ведущие к решению	не оцениваются

11.5. Через точку M внутри круга радиуса r с центром в точке O провели две перпендикулярные хорды. Известно, что сумма квадратов длин этих хорд равна m^2 . Найдите длину отрезка OM .



К решению задачи 11.5

Решение: Обозначим проведённые хорды как AB и CD и опустим на них перпендикуляры OE и OF соответственно (см. рисунок). Четырёхугольник $OEMF$ является прямоугольником, поэтому выполняется равенство $OM = \sqrt{OE^2 + OF^2}$. Точка E — середина хорды AB и из треугольника AOE по теореме Пифагора $AB = 2AE = 2\sqrt{r^2 - OE^2}$. Отсюда $OE^2 = r^2 - 0,25AB^2$. Аналогично получаем $OF^2 = r^2 - 0,25CD^2$, значит,

$$OM = \sqrt{OE^2 + OF^2} = \sqrt{r^2 - 0,25AB^2 + r^2 - 0,25CD^2} = \sqrt{2r^2 - 0,25m^2}.$$

Задача решена.

Ответ: $OM = \sqrt{2r^2 - 0,25m^2}$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Ход решения верен, но получен неверный ответ только из-за арифметических ошибок	6 баллов
Условие задачи верно записано в алгебраической форме (через векторы, координаты, тригонометрические функции и т. п.), но получившаяся алгебраическая задача не решена	3 балла
Рассмотрен только частный случай, когда хотя бы одна из хорд является диаметром	2 балла
Верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)	1 балл

11.6. На заводе работают ровно 217 женщин, среди которых 17 брюнеток, а остальные 200 — блондинки. Перед Новым Годом все они покрасили свои волосы, и каждая из этих женщин написала в «Контакте» фамилии ровно 200 женщин завода, по её мнению, точно являющихся блондинками. При этом каждая из брюнеток указала верно всех блондинок, а каждая блондинка могла указать на кого угодно, кроме себя. Докажите, что на основании этих данных можно выявить по крайней мере 13 блондинок.

Решение: По условию задачи верный список всех 200 блондинок будет в «Контакте» ровно у 17 сотрудниц завода: брюнетки напишут именно его, а блондинка его не напишет никогда, так как в противном случае она должна была бы указать в нём и себя. Значит, если некоторый список встречается не 17 раз, а любое другое количество, то он неверный, и его составила блондинка. Уберём все списки, которые встречаются ровно 17 раз. Останется $217 - 17n$ списков. $217 - 17n \geq 0$, поэтому $n \leq 12$ (мы помним, что n — число натуральное). Тогда осталось не менее $217 - 12 \cdot 17 = 13$ списков, и мы вычислили не менее 13 их авторов-блондинок.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Обосновано, что верный список блондинок встречается ровно в 17 списках (без дальнейшего продвижения)	4 балла
Обосновано, что верный список блондинок встречается хотя бы 17 раз (без дальнейшего продвижения)	2 балла
Имеется только идея определять блондинок, как авторов неверных списков	1 балл
Любые идеи, не ведущие к доказательству	не оцениваются